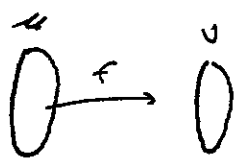


• APLICACIONES LINEALES:



en la aplicación todos los vectores tienen transformado y es único.

→ Condición de linealidad

$$p(\alpha x + \lambda y) = \alpha p(x) + \lambda p(y)$$

Sabremos antes de empezar el ejercicio si es lineal cuando en las ecuaciones de transformación haya comb. lineales de los parámetros o 0.
 ↘ coordenadas genéricas.

* Ejemplo: $p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$p(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 2x_2 + x_3) \text{ lineal.}$$

$$= (x_1^2, x_2 + x_3) \text{ No es lineal.}$$

$$= (x_1 + 1, x_2 + x_3) \text{ No es lineal.}$$

• Demostración:

$$p(\alpha(x_1, x_2, x_3) + \lambda(y_1, y_2, y_3)) = \alpha p(x_1, x_2, x_3) + \lambda p(y_1, y_2, y_3)$$

$$\alpha p(x_1, x_2, x_3) + \lambda p(y_1, y_2, y_3) = \alpha(x_1 - x_2, 2x_2 + x_3) + \lambda(y_1 - y_2, 2y_2 + y_3)$$

$$(\alpha x_1 - \lambda y_1 - \alpha x_2 + \lambda y_2, 2\alpha x_2 + 2\lambda y_2 + \alpha x_3 + \lambda y_3)$$

→ Problema: Ecuaciones de transformación como dato.

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2, x_2 - x_3)$$

o) Demostrar que es lineal:

I) Matriz de la aplicación: Si no dicen lo contrario, se hace en las bases canónicas. Si plantean alguna otra base se ve al final del tema.

$$f(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$$

$$f(0, 1, 0) = (-1, 1, 1)$$

$$f(0, 0, 1) = (0, 0, -1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

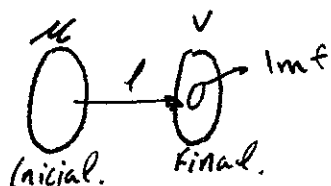
La Matriz de la Aplicación representa las ecuaciones de transformación como producto de matrices.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

→ Aplicación

$$\begin{pmatrix} \vec{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{w} \end{pmatrix} \rightarrow \text{Se introduce un vector } \vec{v} \text{ y se obtiene su transformado.}$$

II) Estudiar la imagen: Imf



la imagen será un s.e.v del e.v final, que será el conjunto de los vectores que son transformados de algún vector inicial.

PROP I

El transformado de cualquier base del origen es un sist. generador de la imagen.

Un sistema generador de la imagen de f sería en este caso $\mathcal{C} = \{(1, 0, 0), (-1, 1, 1), (0, 0, -1)\}$

$$\dim \text{Im} f = \text{rang} A = 3 \iff \boxed{\text{Im} f = \mathbb{R}^3} \rightarrow \text{Aplicación sobreyectiva.}$$

III) Estudiar el núcleo: Kerf

PROP II

Conjunto de vectores que se transforman en el 0. Pertenecen al e.v inicial.

$$\dim V \xrightarrow{\mathbb{R}^3} \dim \text{Im} f + \dim \text{Ker} f$$

$$3 - 3 = \underline{0} \rightarrow \dim \text{Ker} f$$

$$\boxed{\text{Ker} f = \{\vec{0}\}}$$

→ Aplicación inyectiva.

En el caso de no ser 0, en este tipo de problema, el Kerf viene definido por sus ecuaciones implícitas.

IV) Tipo de Aplicación

Teoremas de Caracterización de Homomorfismos $\begin{cases} \text{Inyectivo } \text{Ker} f = \{\vec{0}\} \\ \text{Sobreyectivo } \text{Im} f = \vec{w} f. \end{cases}$

* Inyectivo: Monomorfismo

* Sobreyectivo: Epimorfismo

Aplicación Biyectiva

Endomorfismo

No endomorfismo

Automorfismo

Isomorfismo

v) Aplicación Inversa

$$\bar{x} \xrightarrow{f} f(\bar{x})$$

$$\bar{x} \xleftarrow{f^{-1}} f(\bar{x})$$

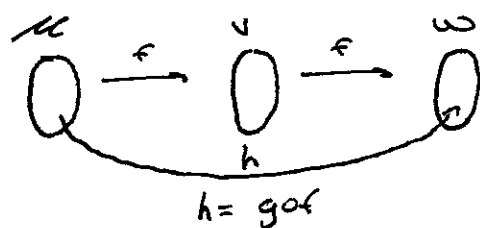
$$\bar{A}\bar{x} = \bar{y}$$

$$\bar{x} = A^{-1}\bar{y}$$

Sólo tiene sentido hablar de apl. inversa si la directa es biyectiva. En caso contrario no será aplicación y se podría estudiar de forma particular qué vectores se transforman en uno dado, pudiendo salir sistema compatible indeterminado o incompatible.

Nota: En todos los casos se puede hallar $f^{-1}(0) = \text{Ker } f$.

vi) Composición de Aplicaciones



Matriz de $f: F$

Matriz de $g: G$

Matriz de $h: H = G \cdot F$

vii) Transformado de un subespacio

$$E: L \equiv \left\{ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

$f(L)$

1º) Base de L

2º) Propiedad I

Buscamos dos vectores independientes entre sí y que cumplan la ecuación de L .

$$\dim L = \dim \mathbb{R}^3 - n^{\circ} \text{ ec} = 3 - 1 = 2 \quad f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2, x_1 - x_3)$$

$$1^\circ) L = \left\{ (1, -1, 0), (1, 0, -1) \right\} \quad \begin{aligned} f(1, -1, 0) &= (2, -1, -1) \\ f(1, 0, -1) &= (1, 0, 1) \end{aligned} \rightarrow \text{S.G. de } f(L)$$

$$2^\circ) B_{\text{im} f} \equiv \left\{ (2, -1, -1), (1, 0, 1) \right\} = \left\{ (3, -1, 0), (1, 0, 1) \right\} \quad \begin{aligned} y_1 &= 3x + p \\ y_2 &= -x \\ y_3 &= p \end{aligned}$$

$$f(L) \equiv \left\{ y_1 + 3y_2 - y_3 = 0 \right\}$$

Se suman para conseguir $u(0)$.

$$\begin{aligned} x &= -y_2 \\ y_1 &= -3y_2 + y_3 \end{aligned}$$

↑
Igual que planteamos el sistema con el vector y .

• Ejemplo 2:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(x_1, x_2) = (3x_1 - x_2, x_1 + x_2, x_1 - x_2)$$

$$f(1, 0) = (3, 1, 1)$$

$$f(0, 1) = (-1, 1, 1)$$

$$\rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Imagen:

$$\dim \text{Im} f = \text{rang} A = 2 < 3 \rightarrow \text{Im} f \subset \mathbb{R}^3 \neq \mathbb{R}^3$$

$$\text{Im} f \equiv \{(3, 1, 1), (-1, 1, 1)\}$$

Ecuaciones paramétricas de la Imf:

$$\text{Im} f \equiv \begin{cases} y_1 = 3\alpha - \beta \rightarrow y_1 = 3(y_2 - \beta) - \beta = 3y_2 - 3\beta - \beta = 3y_2 - 4\beta \\ y_2 = \alpha + \beta \rightarrow \alpha = y_2 - \beta \\ y_3 = \alpha + \beta \end{cases}$$

$$\text{Im} f \equiv \{y_1 - y_2 - 2y_3 = 0\}$$

Núcleo

$$\dim \mathbb{R}^2 = \dim \text{Im} f + \dim \text{Ker} f$$

$$2 = 2 \rightarrow \dim \text{Ker} f = 0$$

$$\mathcal{B}_{\text{Ker} f} \equiv \{\vec{0}\}$$

Aplicación inyectiva.

• Ejemplo 3:

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, x_2 + x_3)$$

$$f(1, 0, 0) = (2, 0)$$

$$f(0, 1, 0) = (-1, 1)$$

$$f(0, 0, 1) = (0, 1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\dim \text{Im} f = \text{rang} A = 2 \rightarrow \text{Im} f = \mathbb{R}^2 \rightarrow$ Aplicación sobreyectiva. Epimorfismo.

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \text{Im} f + \dim \text{Ker} f \rightarrow \dim \text{Ker} f = 1$$

$$\text{Ker} f \equiv \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = 2\lambda \\ x_3 = -2\lambda \end{cases} \equiv \{(1, 2, -2)\}$$

$$f(1, 2, -2) = (2 \cdot 1 - 2, 2 - 2) = \vec{0}$$

→ Examen Final de Enero de 2014:

$$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(e_1) = u_1 + 2u_2 + u_3$$

$$f(1,0,0,0) = (1, 2, 1) \text{ OK}$$

$$f(e_2) = u_1 + 2u_2 + u_3$$

$$f(0,1,0,0) = (1, 2, 1) \text{ OK}$$

$$f(e_3) = -u_1 + u_3$$

$$f(0,0,1,0) = (-1, 0, 1) \text{ OK}$$

$$f(e_4) = -u_1 + u_3$$

$$f(0,0,0,1) = (-1, 0, 1) \text{ OK}$$

$$B_{\mathbb{R}^4} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

$$B_{\mathbb{R}^3} = \{u_1, u_2, u_3\}$$

a) Expresión matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \text{donde } \bar{y} = A \bar{x}$$

b) Base del Kerf y Imf:

$$\text{Im} f \equiv \{(1, 2, 1); (-1, 0, 1)\} \quad \dim \text{Im} f = 2 \neq 3 \rightarrow \text{No sobreyectiva.}$$

Núcleo:

$$\dim \mathbb{R}^4 = \dim \text{Im} f + \dim \text{Ker} f \rightarrow \dim \text{Ker} f = 2 \rightarrow \text{No inyectiva.}$$

$$\text{Ker} f \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\dim \mathbb{R}^4 = \dim \text{Ker} f + n^{\circ} \text{ec} \\ 4 = 2 + n^{\circ} \text{ec} \rightarrow n^{\circ} \text{ec} = 2.$$

$$\text{Ker} f \equiv \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Ker} f \equiv \{(1, -1, 0, 0); (0, 0, 1, -1)\}$$

c) Realizar el cambio de base:

$$B'_{\mathbb{R}^4} = \{E_1, E_2, E_3, E_4\} \quad B'_{\mathbb{R}^3} = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$E_1 = e_1 = (1, 0, 0, 0)$$

$$E_2 = -2e_1 + e_2 + e_3 = (-2, 1, 1, 0)$$

$$E_3 = e_3 = (0, 0, 1, 0)$$

$$E_4 = e_2 - e_4 = (0, 1, 0, -1)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nota: Van E_i sin despejar. En este caso se despejan utilizando las ecuaciones.

→ En el origen:

se efectúa el producto matricial $A \cdot B$.

→ En el final:

$$v_1 = u_1 + u_2 \quad v_2 = u_2 + u_3 \quad v_3 = u_3$$

$$v_1 = (1, 1, 0) \quad v_2 = (0, 1, 1) \quad v_3 = (0, 0, 1)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

consiste en referir a la nueva base los transformados. Matriz de cambio (C^{-1}) . $C^{-1}A$

→ los dos:

$$A' = C^{-1}AB$$

• Cambio de base en homomorfismos:

1) Origen / Inicial

2) Imagen / Final

3) los dos

→ Ejercicio Examen final 2014:

$$A = \begin{pmatrix} x & 2x & 3x \\ 0 & x & 2x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

a) Hallar A^n mediante cálculos matriciales

b) Usando lo anterior, A^{-1} ¿cuándo es posible?

a)

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3A \quad A^n = 3^{n-1} \cdot A$

demostrar por inducción.

$A = B + C$ siendo B y C matrices permutables. → Binom. Newton.

$A = I + B \rightarrow B = \text{Mat. nilpotente.}$

$$A = x [I + B] \rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B^3 = (0)$$

$$A^n = (I + B)^n = \binom{n}{0} I + \binom{n}{1} B + \binom{n}{2} B^2 + \binom{n}{3} B^3 + \dots + \binom{n}{n} B^n$$

$$A^n = x^n \left[\binom{n}{0} I + \binom{n}{1} B + \binom{n}{2} B^2 \right] = x^n \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2 + n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Nota: Suma de los términos de una progresión geométrica:

$$\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

W. H. WELLS, M.D.,
University of California, Los Angeles

W. H. WELLS, M.D.,
University of California, Los Angeles

W. H. WELLS, M.D.,
University of California, Los Angeles

W. H. WELLS, M.D.,
University of California, Los Angeles

W. H. WELLS, M.D.,
University of California, Los Angeles

W. H. WELLS, M.D.,
University of California, Los Angeles

W. H. WELLS, M.D.,
University of California, Los Angeles

W. H. WELLS, M.D.,
University of California, Los Angeles

• Autovalores y autovectores:

→ Autovalores:

$$|A - \lambda I| = 0$$

Raíz λ_i con orden de multiplicidad ≥ 1 ($m_i = 1, 2, 3, \dots$)

→ Autovectores:

Cada autovalor lleva asociado un subespacio vectorial que llamamos autovector y viene expresado por sus ecuaciones implícitas. La dimensión del subespacio recibe el nombre de multiplicidad geométrica (s_i).

$$\lambda_i \longrightarrow \begin{matrix} m.a = 1 & m.g = 1 \\ m.a = r > 1 & m.g \leq 1. \end{matrix}$$

→ Diagonalización de matrices por semejanza:

se dará si la m_a y s_i coinciden.

$$A = P D P^{-1} \quad \text{siendo} \implies D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

P (matriz de paso), formada por los autovectores puestos por columnas en el mismo orden que hemos dispuesto los autovalores.

• Estudiar autovalores y autovectores:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

* Autovalores: $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0; (1-\lambda)^2(3-\lambda) - (1-\lambda) + 2(1-\lambda) = 0$$
$$(1-\lambda) [(1-\lambda)(3-\lambda) - 1 + 2] = 0$$

Autovalores:

$$\lambda = 1 \quad m_a = 1$$

$$\lambda = 2 \quad m_a = 2$$

$$(1-\lambda) [3 - 4\lambda + \lambda^2 + 1] = 0; (1-\lambda)(2-\lambda)^2 = 0$$

Nota: Si piden sólo estudiar si es diagonalizable, estudiamos la multiplicidad geométrica para $\lambda = 2$ que es el único que puede dar problemas.

* Autovectores:

$$\lambda=1 \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda=0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \begin{cases} 2x_2=0 \\ -x_1+2x_2+x_3=0 \\ x_2=0 \end{cases} \equiv \begin{cases} x_1=\alpha \\ x_2=0 \\ x_3=\alpha \end{cases} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda=2 \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \begin{cases} -x_1+2x_2=0 \\ -x_1+x_2+x_3=0 \\ x_2-x_3=0 \end{cases} \equiv \begin{cases} x_1=2\beta \\ x_2=\beta \\ x_3=\beta \end{cases} \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{m.g.s} \\ \lambda=2. \end{matrix}$$

la matriz no es diagonalizable.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\bar{u}$ es autovector asociado a λ :

$$f(\bar{u}) = \lambda \bar{u}$$

es decir: $f(\bar{u}) = \bar{u}$; $\lambda=1$

$$f(\bar{u}) = 0; \bar{u} \in \text{Ker } f$$

$$\lambda=0.$$

a) Hallar $f(\bar{v})$ $\bar{v} = e_1 + e_2 - e_3$

b) ¿Es $\bar{v}$ un autovector?

$$c) \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \rightarrow f(\bar{v}) = 0 \rightarrow \lambda=0.$$

o Ejercicio 5 Enero 2014:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

a) ¿ e_1 es autovector?

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(e_1) = \lambda e_1; \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda=2} \rightarrow \text{Autovalor}$$

e_1 es un autovector.

* Autovalores:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 (1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda=3$$

$$\lambda=2$$

$$(\lambda-2)^3 (\lambda-3)$$

$$\lambda=2 \rightarrow m_a=3$$

$$\lambda=3 \rightarrow m_a=1.$$

* Autovectores:

$$\underline{\lambda=2} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \beta \\ x_4 = \beta \end{cases} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$m.g = s = 2$$

$$\underline{\lambda=3} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 = 0 \\ -2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \delta \\ x_4 = 2\delta \end{cases} \equiv \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

• No es diagonalizable.

$$m.g = s = 1.$$

• Forma bilineal:

$$f: \mathcal{U} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = a \in \mathbb{R}$$

→ Matriz de Gram:

$$\text{Base } \{e_1, e_2, e_3\}$$

$$G = \begin{pmatrix} f(e_1, e_1) & f(e_1, e_2) & f(e_1, e_3) \\ f(e_2, e_1) & f(e_2, e_2) & f(e_2, e_3) \\ f(e_3, e_1) & f(e_3, e_2) & f(e_3, e_3) \end{pmatrix} \rightarrow f(\bar{x}, \bar{y}) = (x_1, x_2, x_3) G \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

• Producto escalar: $f(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{y}, \bar{x}) \iff G$ simétrica.

• G tiene que ser definida positiva.

1º) $\lambda_i > 0$ def $\oplus$

2º) Menores principales > 0 .

→ Multiplicar vectores:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_x, u_y, u_z) \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

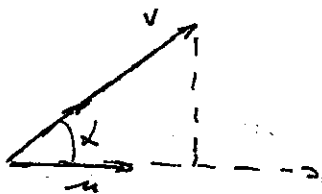
→ Módulos:

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$$

→ Ángulos:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

→ Proyecciones:



$$\text{proy}_{\vec{u}} \vec{v} = |\vec{v}| \cdot \cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}}$$

• Ejercicio n° 6 Enero 2014:

Espacio vectorial euclídeo de $\dim = 3$

$$\|e_1\| = \|e_2\| = 1 \quad \|e_3\| = 2$$

$e_1 \perp e_2 \perp e_3$; e_2 y e_3 forman un ángulo $\alpha = 60^\circ$

a) Hallar la Matriz de Gram.

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} g_{11} &= \langle e_1, e_1 \rangle = e_1 \cdot e_1 = \|e_1\|^2 = 1 \\ g_{22} &= 1 \\ g_{33} &= 4 \end{aligned}$$

$$g_{21} = g_{12} = 0 \rightarrow \text{ya que } \|e_1\| \cdot \|e_2\| = 0$$

$$g_{13} = 0 = g_{31} \rightarrow \text{ya que } \|e_1\| \cdot \|e_3\| = 0.$$

$$g_{23} = g_{32} = \|e_2\| \cdot \|e_3\| \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Nota: Un espacio euclídeo es todo aquel en el que se pueda definir un producto escalar.

b) Hallar la ecuación en forma continua de la recta que pasa por el pto, $P(-1, 2, 1)$ y es ortogonal al plano vectorial $x - y + z = 0$. $\equiv d$

-Nota: En espacio afín $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1}$. Esto ahora no es válido; hay que encontrar un vector ortogonal al plano, o lo que es lo mismo, ortogonal a los dos vectores que definen dicho plano vectorial.

$$L \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = -\alpha + \beta \end{cases} \rightarrow B_L \equiv \left\{ (1, 0, -1); (0, 1, 1) \right\}$$

$$\vec{u} \text{ ortog a } \begin{cases} (1, 0, -1) \\ (0, 1, 1) \end{cases} \iff \begin{aligned} \vec{u} \cdot (1, 0, -1) &= 0 \\ \vec{u} \cdot (0, 1, 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Siendo } \vec{u} = (x, y, z)$$

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\equiv \begin{cases} x - y - 4z = 0 \\ 2y + 5z = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} x = 3/2 a \\ y = -5/2 a \\ z = a \end{cases} \equiv (3, -5, 2) = \vec{n}$$

$$\text{Solución: } \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z-1}{2} \equiv t.$$

Nota: Se sabe hallar el vector ortogonal a dos dados.

c) Hallar la proyección ortogonal del vector $(2, 2, 2)^t = \vec{w}$ sobre el plano vectorial $x - y + z = 0$

$$B_L \equiv \left\{ (1, 0, -1); (0, 1, 1) \right\}$$

$\rightarrow$ Se descompone $\vec{w}$ en dos vectores, uno la proyección ortogonal pedida y el otro ortogonal al plano. ($\vec{w} = \vec{v} + \vec{z}$)

$\vec{v} \rightarrow$ Proyec. ortogonal $\vec{z} \rightarrow$ vector ortogonal al plano.

$$\vec{v} = \alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, 1) \quad \alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, 1) + \gamma(3, -5, 2) = (2, 2, 2)$$

$$\vec{z} = \gamma(3, -5, 2)$$

$$\begin{cases} \alpha + 3\gamma = 2 \\ \beta - 5\gamma = 2 \\ -\alpha + \beta + 2\gamma = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} \alpha &= 1/5 \\ \beta &= 3 \\ \gamma &= 1/5 \end{aligned}$$

$$\cdot \text{Proyec. ortogonal} = \frac{2}{5}(1, 0, -1) + 3(0, 1, 1)$$

$$P.ORT = \left(\frac{2}{5}, 3, \frac{2}{5} \right) = \vec{v}$$

• Ejercicio 4 de Enero 2024:

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = [x_1 + 3x_2 + 5x_3, 2x_1 + 4x_2 + 6x_3]$$

4.1)

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

4.2)

Imágenes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rg}(A) = 2 = \dim(\text{Im} f).$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rg}(A) = 2 = \dim(\text{Im} f)$$

$$B_{\text{Im} f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Núcleo: (Kerf)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases} \quad n=3 \quad r=2; \quad p=1.$$

$$x_1 = -3x_2 - 5x_3 \rightarrow -3x_2 - 5x_3 = (-4x_2 - 6x_3)/2$$

$$x_1 = \frac{-4x_2 - 6x_3}{2}$$

$$-6x_2 - 10x_3 = -4x_2 - 6x_3$$

$$-2x_2 - 4x_3 = 0 \quad ; \quad 4x_3 = -2x_2$$

$$x_3 = \frac{-x_2}{2}$$

$$x_1 + 3(-2x) + 5x = 0$$

$$x_1 - 3x = -5x = -2x \Rightarrow x_1 = -2x$$

$$x_1 + 3(-2x) + 5x = 0$$

$$x_1 - \alpha = 0 \quad ; \quad x_1 = \alpha$$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = -2\alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases} \rightarrow B_{\text{Ker} f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \text{No es inyectiva pues } \text{Ker} f \neq \{0\}.$$

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim(\text{Im} f) + \dim(\text{Ker} f) \quad ; \quad \dim \text{Ker} f = 1$$

• Ejercicio 1 de Julio de 2014:

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 \quad \begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 + x_3 \\ y_3 = x_1 + x_3 \\ y_4 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

$$1) \quad f(1, 0, 0) = \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 1 \\ y_3 = 1 \\ y_4 = 1 \end{cases}$$

$$f(0, 1, 0) = \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 0 \\ y_4 = 1 \end{cases}$$

$$f(0, 0, 1) = \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 1 \\ y_3 = 1 \\ y_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

2) Imagen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rg}(A) = 2 \rightarrow \dim(\text{Im} f) = 2$$

$$\text{B}_{\text{Im} f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \text{No sobreyectiva.}$$

Núcleo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ \cancel{x_1 + x_2 + x_3 = 0} \\ \cancel{x_1 + x_2 = 0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} n=3 \\ r=2 \\ p=1 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = -\alpha \\ x_3 = -\alpha \end{cases} \quad \text{B}_{\text{Ker} f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

La aplicación tampoco es inyectiva y por lo tanto no es biyectiva.

• Ejercicio 2 de Enero de 2014:

$$\|e_1\| = 1; \|e_2\| = 1; \|e_3\| = 2$$

$e_1 \perp e_2, e_3$ / e_2 y e_3 forman 60° .

$$1) \quad G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} g_{12} &= g_{21} \\ g_{13} &= g_{31} \\ g_{32} &= g_{23} \end{aligned}$$

$$g_{11} = e_1 \cdot e_1 = 1$$

$$g_{22} = e_2 \cdot e_2 = 1$$

$$g_{33} = e_3 \cdot e_3 = 4$$

$$g_{12} = e_1 \cdot e_2 = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ = 0$$

$$g_{13} = e_1 \cdot e_3 = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ = 0$$

$$g_{32} = e_3 \cdot e_2 = 1 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 1$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2) \quad \bar{w} = (-1, -1, 1) \text{ con } e_3 = (0, 0, 1)$$

$$\cos \alpha = \frac{\bar{w} \cdot e_3}{\|\bar{w}\| \cdot \|e_3\|} = \frac{3}{2\sqrt{4}} = \frac{3}{4} \rightarrow \alpha = \arccos \frac{3}{4}$$

$$\bar{w} \cdot e_3 = (-1, -1, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1, 0, 3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\|\bar{e}_3\| = 2$$

$$\|\bar{w}\|^2 = \sqrt{\bar{w} \cdot G \bar{w}} = (-1, -1, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1, 0, 3) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$$

$$\|\bar{w}\| = \sqrt{4} = 2$$

• Ejercicio 3 de Julio de 2014:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

1) Autovalores y multiplicidad algebraica:

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(-1-\lambda)(-\lambda) - (-1)(-1-\lambda) = 0$$

$$(2 + 2\lambda + \lambda + \lambda^2)(-\lambda) - (1 + \lambda) = 0$$

$$-2\lambda + 2\lambda^2 - \lambda^2 - \lambda^3 - 1 - \lambda = 0; -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & -3 & -3 & -1 \\ -1 & & +3 & 2 & +1 \\ \hline & -1 & -2 & -1 & \underline{0} \\ -1 & & 1 & +1 & \\ \hline & -1 & -1 & \underline{0} & \\ -1 & & +1 & & \\ \hline & -1 & \underline{0} & & \end{array}$$

Autovalores: $\lambda = -1$ (triple).

$$m.a. = 3.$$

$$\lambda = -1$$

2) Autovectores y multiplicidad geométrica:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = \alpha \end{cases}$$

$$n=3 \quad r=1$$

$$B_{\lambda=-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \text{Multiplicidad geométrica}$$

$$H.A. = S = 2.$$

$$\lambda = -1$$

La matriz no sería diagonalizable
pues $H.A. \neq H.G.$

• Ejercicio 2 de Enero de 2015:

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + 2x_3)$$

$$B_{\mathbb{R}^3} = \{e_1, e_2, e_3\} \quad B_{\mathbb{R}^2} = \{u_1, u_2\}$$

$$1) \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

2) Imagen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rg}(A) = 2 = \dim(\text{Im } f)$$

$$B_{\text{Im } f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Núcleo:

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim(\text{Im } f) + \dim(\text{Ker } f); \dim(\text{Ker } f) = 1.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} n=3 \\ r=2 \rightarrow d=1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases} \rightarrow B_{\text{Ker } f} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{matrix} x_3 = -x_2 \\ x_1 + x_2 - x_2 = 0; x_1 = 0 \end{matrix}$$

La aplicación lineal es sobreyectiva debido a que la $\dim(\text{Im } f) = \dim \mathbb{R}^2$.

$$3) \quad B'_{\mathbb{R}^3} = \{E_1, E_2, E_3\}; E_1 = e_1; E_2 = -e_2 + e_3; E_3 = e_3$$

$$B'_{\mathbb{R}^2} = \{v_1, v_2\}; v_1 = u_1 + u_2; v_2 = u_1 + 2u_2$$

$$A' = Q^{-1} A \cdot P \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \rightarrow \text{Nueva expresión matricial.}$$

• Ejercicio 2 de Enero de 2015:

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

1)

$$f(e_3) = \lambda \cdot e_3$$

$$f(e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\lambda = 1} \quad e_3 \text{ es autovector asociado al autovalor } \lambda = 1.$$

2)

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 (-2-\lambda) = (1-2\lambda+\lambda^2)(-2-\lambda) = 0$$

$$-2 + 4\lambda - 2\lambda^2 - \lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 = 0;$$

$$-\lambda^3 + 3\lambda - 2 = 0;$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & +2 & \\ \hline & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & & \\ \hline & -1 & -2 & 0 & \\ -2 & & +2 & & \\ \hline & -1 & 0 & & \end{array}$$

Autovalores: $\lambda = 1$ m.a. = 2

$\lambda = -2$ m.a. = 2.

3) $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ \hookrightarrow x_1 = -x_2 \end{cases} \quad \begin{matrix} n=3 \\ r=2 \rightarrow p=1 \end{matrix}$$

$$x_1 - 3x_1 = 0; x_1 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \alpha \end{cases} \rightarrow B_{\lambda=1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{M.G.} = S = 1.$$

$\lambda = -2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3x_1 = 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ \cancel{x_1 = 0 \rightarrow x_1 = 0} \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 = -3x_3 \end{cases} \quad \begin{matrix} n=3 \\ r=2 \rightarrow p=1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -3\alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases} \rightarrow B_{\lambda=-2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{M.G.} = S = 1.$$

4) La matriz A no es diagonalizable pues para $\lambda = 1$ la m.a. = 2 y m.g. = 1.

• Ejercicio 3 de Enero de 2015:

$$\|u_1\| = 2; \|u_2\| = 1; \|u_3\| = \sqrt{2} \quad \widehat{u_1, u_2} = \frac{\pi}{2}; \widehat{u_1, u_3} = \frac{\pi}{4} \\ \widehat{u_2, u_3} = \frac{\pi}{2}$$

$$1) G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} g_{12} = g_{21} \\ g_{31} = g_{13} \\ g_{32} = g_{23} \end{cases}$$

$$g_{11} = \|u_1\|^2 = 4$$

$$g_{22} = \|u_2\|^2 = 1$$

$$g_{33} = \|u_3\|^2 = 2$$

$$g_{12} = \|u_1\| \cdot \|u_2\| \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$g_{31} = \|u_1\| \cdot \|u_3\| \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$$

$$g_{32} = \|u_3\| \cdot \|u_2\| \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 1^{\text{a}} \text{ condición: Simétrica } \checkmark \\ 2^{\text{a}} \text{ condición: Definida positiva } \checkmark \end{array}$$

$$\bullet 2^{\text{a}} \text{ condición: } 4 > 0 ; \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} > 0 \quad \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} > 0$$

2) $P(-1, -1, 1)$ ortogonal al plano $z=0 \equiv \pi$

$$\pi \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow B_{\pi} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\vec{v} \text{ ORTOGONAL A } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \vec{v} \cdot \vec{e}_1 = 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{e}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v} = (x, y, z)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{e}_1 = (x, y, z) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\vec{v} \cdot \vec{e}_2 = (x, y, z) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 ; (x, y, z) \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 4x + 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} n=3 \\ r=2 \rightarrow p=1 \end{array} \rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = -2\alpha \end{cases} \rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Recta} \rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{-2} \equiv t$$

3) $\vec{w} = (1, 2, 4)^t$ sobre $z=0$

$\vec{w} = \vec{v} + \vec{z}$; $\vec{v}$: proyec. ortogonal $\vec{z}$: vector ortogonal

$$\vec{v} = \alpha (1, 0, 0)^t + \beta (0, 1, 0)^t$$

$$\vec{z} = \gamma (1, 0, -2)^t$$

$$\alpha (1, 0, 0)^t + \beta (0, 1, 0)^t + \gamma (1, 0, -2)^t = (1, 2, 4)^t$$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 1 \rightarrow 8\alpha = 3 \\ \beta = 2 \rightarrow \beta = 2 \\ -2\gamma = 4 \rightarrow \gamma = -2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \text{Proyección:} \\ (3, 0, 0)^t + (0, 2, 0)^t = \\ = (3, 2, 0)^t \end{array}$$

• Ejercicio 1 de Julio de 2013:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ n=2 \quad r=2 \rightarrow p=2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = -\alpha \\ x_3 = \beta \\ x_4 = -\beta \end{cases} \rightarrow B_{\ker f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{aligned} x_3 &= -x_1 - x_2 - x_4 \\ x_3 &= -\alpha + \alpha - x_4 \end{aligned}$$

$\dim(\ker f) = 2.$

$$2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \operatorname{rg}(A) = 2 = \dim(\operatorname{Im} f)$$

$$B_{\operatorname{Im} f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\alpha, 0, \alpha, 0) + (0, 0, \beta, 0) \rightarrow \begin{aligned} x_1 &= \alpha \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= \alpha + \beta \\ x_4 &= 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$3) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow |A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)^2 \lambda^2 = (1-2\lambda+\lambda^2) \lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda^2(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda = 0 \text{ m.a.} = 2 ; \lambda = 1 \text{ m.a.} = 2.$$

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1 \text{ (doble)}$$

4)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \\ -x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} n=4 \\ r=2 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \beta \\ x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow B_{\lambda=1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{matrix} \text{M.G.} = 2 \\ \lambda = 1 \end{matrix}$$

$\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 ; x_1 = -x_2 \\ x_3 + x_4 = 0 ; x_3 = -x_4 \end{cases} \quad \begin{matrix} n=4 \\ r=2 \\ p=2 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = -\alpha \\ x_3 = \beta \\ x_4 = -\beta \end{cases} \rightarrow B_{\lambda=0} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{matrix} \text{M.G.} = 2 \\ \lambda = 0 \end{matrix}$$

• Ejercicio 2 de 2013:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$a) \cos \alpha = \frac{u_1 \cdot u_2}{\|u_1\| \cdot \|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$b) 1 > 0 ; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} > 0 ; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

• Definida positiva.

$$c) S \equiv x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \quad \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = -\alpha - 2\beta \end{cases}$$

Proyección ortogonal de $\vec{v} = 2u_1 - u_2 + 2u_3$

$$S \equiv \left\{ (1, 0, -1); (0, 1, -2) \right\}$$

$$\vec{v} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \rightarrow \begin{array}{l} \vec{w}_1 = \text{Proyecci. ortogonal} \\ \vec{w}_2 = \text{Vector ortogonal a S.} \end{array}$$

$$\vec{w}_2 \cdot (1, 0, -1) = 0$$

$$\vec{w}_2 \cdot (0, 1, -2) = 0$$

$$\vec{w}_2 = (a, b, c)$$

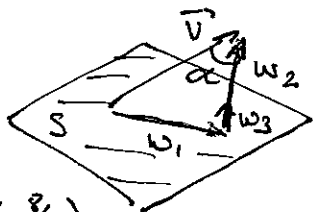
Nota: Problema tipo; encontrar un vector ortogonal a los dados o lo que es lo mismo, vector ortogonal al plano.

$$(a, b, c) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{array}{l} -b - 2c = 0 \\ -a - 2b - 4c = 0 \end{array} \begin{cases} a = 0 \\ b = -2\lambda \\ c = \lambda \end{cases}$$

$$\equiv \left\{ (0, -2, 1) \right\} \quad \vec{w}_2 \text{ es paralelo al } (0, -2, 1) \text{ y necesitamos hallar su módulo. (Proyección de } \vec{v} \text{ sobre } S)$$

Módulo de $\vec{v}$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}_3}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}_3\|} ; \|\vec{w}_2\| = \|\vec{v}\| \cos \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}_3}{\|\vec{w}_3\|}$$



$$\text{sol: } (2, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$$

Problema tipo: Hallar la proyección ortogonal de un vector en un plano.

1) Vector ortogonal al plano (a, b, c) $(G) (P_1^T P_2^T) = 0$

2) Hallamos el $\|\vec{w}_3\|$ haciendo $\sqrt{(w_3)_1^2 + (w_3)_2^2}$

3) Hallamos módulo de $\vec{w}_2$, proyectando $\vec{v}$. $\|\vec{v}\| = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}_3}{\|\vec{w}_3\|}$

4) $\vec{w}_2 = \frac{\|\vec{w}_2\|}{\|\vec{w}_3\|} \vec{w}_3$

5) $\vec{w}_1 = \vec{v} - \vec{w}_2$

$$|\bar{w}_2| = \frac{(2, -1, 2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{(0, -2, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}}, \quad \bar{w}_2 = \frac{|\bar{w}_2|}{|\bar{w}_3|} \cdot \bar{w}_3 = \text{valor de } w_2.$$

d)

BASE ORTOGONAL A PARTIR DE UNA BASE DADA $\{u_1, u_2, u_3\}$.

$$O \equiv \{e_1, e_2, e_3\} \quad \begin{array}{l} e_1 = u_1 \\ e_2 = u_1 + a u_2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} e_1 \cdot e_2 = 0 \\ e_1 = (1, 0, 0) \\ e_2 = (1, a, 0) \end{array}$$

$$e_1 \cdot e_2 = 0 \rightarrow (1, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (1, 1, 1) = 0$$

$$1 + a = 0; \quad a = -1$$

$$e_2 = (1, -1, 0)$$

$$e_3 = u_1 + b u_2 + c u_3 = (1, b, c)$$

$$\begin{array}{l} e_1 \cdot e_3 = 0 \\ e_2 \cdot e_3 = 0 \end{array} \rightarrow (1, b, c) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1+b+c \\ -b+c \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{array}{l} 1+b+c=0 \\ b+c=0 \end{array} \rightarrow \text{Sist. incompatible.}$$

Nota: Para resolver lo único que hay que hacer es cambiar el orden de los vectores de manera que podamos arrancar con $e_1 = u_2$.

→ Método Gram-Schmidt:

$$\bar{v}_1 = \bar{u}_1$$

$$\bar{v}_2 = \bar{u}_2 - \frac{g_{12}}{g_{11}} \bar{u}_1 = \bar{u}_2 - u_1 = (-1, 1, 0)$$

$$\bar{v}_3 = \bar{u}_3 - \frac{\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_3}{\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_1} \bar{u}_1 - \frac{(\bar{u}_2 - \bar{u}_1) \cdot \bar{u}_3}{(\bar{u}_2 - \bar{u}_1) \cdot (\bar{u}_2 - \bar{u}_1)} (\bar{u}_2 - \bar{u}_1)$$

$$\text{Base} \equiv \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$$

↳ Base ortogonal

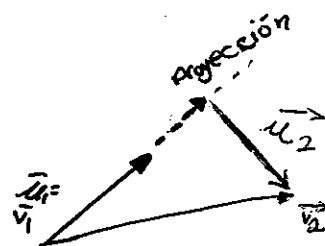
$$\bar{u}_1 = \bar{v}_1$$

$$\bar{u}_2 = \bar{v}_2 - \text{proyección}_{\bar{u}_1} \bar{u}_2 = \bar{v}_2 - \frac{\bar{v}_2 \cdot \bar{u}_1}{|\bar{u}_1|^2} \bar{u}_1$$

$$\bar{u}_2 = \bar{v}_2 - \frac{g_{21}}{g_{11}} \bar{u}_1$$

$$\bar{u}_3 = \bar{v}_3 - \text{proyección}_{(\bar{u}_1, \bar{u}_2)} \bar{v}_3 = \bar{v}_3 - \frac{\bar{v}_3 \cdot \bar{u}_1}{|\bar{u}_1|^2} \bar{u}_1 - \frac{\bar{v}_3 \cdot \bar{u}_2}{|\bar{u}_2|^2} \bar{u}_2$$

$$\bar{v}_3 = \frac{-g_{31}}{g_{11}} \bar{u}_1 - \frac{g_{32}}{g_{22}} \bar{u}_2$$



$$a) \quad B = \{ \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3 \} \quad O = \{ \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \}$$

$\nwarrow$ Base ortogonal.

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\bar{v}_1 = \bar{u}_1 = (1, 0, 0)$$

$$\bar{v}_2 = \bar{u}_2 - \frac{g_{21}}{g_{11}} \bar{u}_1 = \bar{u}_2 - \frac{1}{1} \bar{u}_1 = -\bar{u}_1 + \bar{u}_2 = (-1, 0, 0) + (0, 1, 0) = (-1, 1, 0)$$

$$\bar{v}_3 = \bar{u}_3 - \frac{g_{31}}{g_{11}} \bar{u}_1 - \frac{\bar{u}_3 \cdot (-\bar{u}_1 + \bar{u}_2)}{(-\bar{u}_1 + \bar{u}_2) \cdot (-\bar{u}_1 + \bar{u}_2)} (-\bar{u}_1 + \bar{u}_2) =$$

$$= \bar{u}_3 - \frac{1}{1} \bar{u}_1 - \frac{(0, 0, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{(-1, 1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} (-1, 1, 0) =$$

$$= (0, 0, 1) - (1, 0, 0) - \frac{(1, 2, 3) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{(0, 1, 1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} (-1, 1, 0) =$$

$$= (0, 0, 1) - (1, 0, 0) - (-1, 1, 0) = (0, -1, 1)$$

$$O = \{ \bar{u}_1, -\bar{u}_1 + \bar{u}_2, -\bar{u}_2 + \bar{u}_3 \} \text{ (Base ortogonal)}$$

→ Para ortogonalizar:

$$N = \left\{ \frac{\bar{v}_1}{|\bar{v}_1|}, \frac{\bar{v}_2}{|\bar{v}_2|}, \frac{\bar{v}_3}{|\bar{v}_3|} \right\} \text{ Base } \cancel{\text{ortogonal}} \text{ ortonormal (ortogonal con unitarios.)}$$

$$v_1 = \sqrt{(1, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{(1, 1, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = 1.$$

$$v_2 = \text{calculado antes} = 1$$

$$v_3 = \sqrt{(0, -1, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{(0, 0, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = 1$$

$$N = \left\{ \frac{v_1}{1}, \frac{v_2}{1}, \frac{v_3}{1} \right\}$$

• Diagonalizar la forma cuadrática

$$f(x, y, z, u) = 2x^2 + 2xy + 4xz + 2zu + u^2$$

→ Se plantea toda la ecuación como suma de cuadrados; después se hace un cambio de base cuyas coordenadas están formadas por los cuadrados obtenidos.

1) Se arranca con cualquiera de las coordenadas genéricas, de la que tengamos un cuadrado y dentro del paréntesis ponemos los productos con ella.

Cuadrado $f(x)$ $(a^2 + b^2 + c^2 + \dots)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \dots + 2ab + 2ac + 2bc + \dots$

$$f(x, y, z, u) = 2x^2 + 2xy + 4xz + 2zu + u^2$$

$$= 2 \left(x + \frac{y}{2} + z \right)^2 - \frac{y^2}{2} - 2z^2 + 2zu + u^2 - 2yz$$

$$x_1 = x + \frac{y}{2} + z$$

$$= 2 \left(x + \frac{y}{2} + z \right)^2 - \frac{1}{2} (y + 2z)^2 + 2z^2 - 2z^2 + 2zu + u^2 =$$

$$= 2 \left(x + \frac{y}{2} + z \right)^2 - \frac{1}{2} (y + 2z)^2 + (u + z)^2 - z^2$$

• Cambio de base:

$$\begin{cases} x_1 = x + \frac{y}{2} + z \\ x_2 = y + 2z \\ x_3 = u + z \\ x_4 = z \end{cases}$$

Nueva
ecuación

$$f(\bar{x}) = 2x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + x_3^2 - x_4$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

* Caso particular: No tenemos cuadrados.

$$f(x, y, z, u) = xy + yz + zu + ux = x_1^2 - x_2^2$$

$$(x+z)(y+u) = xy + xu + yz + zu$$

$$x_1 + x_2 = x + z$$

$$x_1 - x_2 = y + u$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow f(x, y, z, u) = 7xy + yz + 3zu$$

$$7 \left(x + \frac{z}{7} \right) (y + 2zu) - 14 \frac{z}{7} xz = 7x_1^2 - 7x_2^2 - 14x_3^2 + 14x_4^2$$

$$x_1 + x_2$$

$$x_1 - x_2$$

$$x = x_3 + x_4$$

$$u = x_3 - x_4$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$